ERRATA CORRIGE "VOLUME EASY MATHS 1"

I) Le pagine 1 e 2 sostituiscono la pagina 35 del volume EASY MATHS 1

0.1 I numeri: naturali, interi, razionali e irrazionali

Tra i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, più comunemente usati, c'è l'insieme $\mathbb{N}_0$ dei *numeri naturali* che è costituito dallo zero, dall'unità di $\mathbb{R}$ e dal successivo di ogni suo elemento, quindi:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 1+1, 1+1+1, ...\};$$

se si usa la rappresentazione decimale, allora:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

E' utile, per il seguito, considerare l'insieme $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 - \{0\}$ che è costituito da tutti i numeri naturali positivi.

Poi, c'è l'insieme $\mathbb{Z}$ degli *interi relativi*:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Inoltre, c'è l'insieme $\mathbb{Q}$ dei *numeri razionali:*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{R} \ : \ m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Infine, c'è l'insieme dei *numeri irrazionali*, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, che è costituito da tutti i numeri reali che non appartengono a $\mathbb{Q}$; quindi, a tale insieme appartengono i numeri reali che non possono esprimersi come rapporto tra un intero relativo e un numero naturale. Ad $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ appartengono, ad esempio, π e $\sqrt{2}$. Di $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ci occuperemo nella sezione 2.1 del volume Easy Maths 2.

Passiamo, ora, alle proposizioni seguenti:

Proposizione 0.1.1 **(Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$)**
Qualunque siano $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, con $q_1 < q_2$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che:

$$q_1 \ < \ q \ < \ q_2.$$

Dim. Basta osservare che sommando due numeri razionali si ottiene ancora un numero razionale, quindi $q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}$, conseguentemente:

$$q = \frac{q_1 + q_2}{2} \in \mathbb{Q},$$

da cui, essendo $q_1 < q < q_2$, si ha l'asserto.

Proposizione 0.1.2 *Qualunque siano $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, con $q_1 < q_2$, esistono infiniti numeri razionali compresi tra q_1 e q_2.*

La dimostrazione di questa proposizione verrà fatta nella sezione 2.4.
Si può dimostrare che:

II) Le pagine 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 sostituiscono le pagine 42, 43, 44, 45 e i primi 10 righi della pagina 46 del volume EASY MATHS 1

0.2 I numeri razionali e i numeri decimali

Sia q un numero razionale, i.e. $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, con $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.
Iniziamo con l'osservare che q si può scrivere in infiniti modi; infatti, qualunque sia $z \in \mathbb{Q} - \{0\}$, si ha che:

$$q = \frac{m}{n} = \frac{z \cdot m}{z \cdot n}.$$

Supponiamo, ora, che q *non sia un intero* (i.e. $q \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$). Diremo che $q = \frac{m}{n}$ è una **frazione decimale** se:

$$\exists\ i \in \mathbb{N} : \ n = 10^i.$$

In questo caso, dividendo m per n si ottiene un **numero decimale finito**, vale a dire un numero decimale che possiede un numero finito di cifre decimali.

Consideriamo il seguente esempio:

$$\frac{3459}{100} = \frac{3000 + 400 + 50 + 9}{100} = \frac{3000}{100} + \frac{400}{100} + \frac{50}{100} + \frac{9}{100} =$$
$$= 30 + 4 + \frac{5}{10} + \frac{9}{100} = 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}.$$

Dunque, la frazione di partenza può considerarsi come la somma di $3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}$, pertanto può essere indicata con la scrittura 34,59.

Ora, consideriamo ancora $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ e supponiamo che q **sia ridotto ai minimi termini**.

Scomposto il denominatore n di q in fattori primi, si possono presentare due soli casi:

a) *n non contiene fattori diversi da 2 e da 5;*

b) *n contiene almeno un fattore diverso da 2 e da 5.*

Nel caso **a)**, q si può facilmente riscrivere come una frazione decimale.

Ad esempio:

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5; \quad \frac{13}{5} = \frac{26}{10} = 2,6; \quad \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0,05.$$

Quindi, *nel caso* **a)** *il numero q è un numero decimale finito.*

Nel caso **b)**, invece, *il numero q è un numero decimale periodico*, vale a dire un numero le cui cifre decimali sono infinite e che, da un certo punto in poi, tali cifre si ripetono a gruppi sempre uguali.

Ad esempio:

$$\frac{1}{3} = 0,333333... = 0,\overline{3}; \quad \frac{35}{6} = 5,8333333\cdots = 5,8\overline{3}\ .$$

Il gruppo di cifre che si ripete si chiama **periodo** *e si contrassegna con una barra*; invece, *le eventuali cifre comprese tra la virgola ed il periodo costituiscono l'***antiperiodo**.

Anche in questo caso, per individuare il numero decimale periodico corrispondente ad una data frazione occorre effettuare la divisione tra il numeratore ed il denominatore e prestare attenzione alle cifre che si ripetono.

Esempi.

$$\frac{10}{7} = 1,\overline{142857}; \quad \frac{12000}{37} = 324,\overline{324}\ .$$

Esempio. Trasformare la frazione $\frac{12000}{72}$ in un numero decimale dopo averla ridotta ai minimi termini:

$$\frac{12000}{72} = \frac{500}{3} = 166,\overline{6}.$$

Come risulta dai due esempi appena visti, **il periodo si contrassegna con una barra**.

- *Il* **numero decimale periodico** *si dice* **semplice** *se il periodo inizia subito dopo la virgola* (quindi tale numero è privo di antiperiodo).

- *Il* **numero decimale periodico** si dice **misto** *se tale numero è dotato di antiperiodo* (quindi, c'è almeno una cifra compresa tra la virgola e il periodo).

OSSERVAZIONE.

Considerato un qualunque numero razionale $\frac{m}{n}$*, proviamo che dividendo* m *per* n *si ottiene un numero decimale finito o periodico.*

Supponiamo, tanto per fissare le idee, che $0 < m < n$.

Essendo $m < n$, iniziamo a dividere $10m$ per n. Da tale divisione otteniamo $q_1, r_1 \in \mathbb{N}_0$ (quoziente e resto della divisione di $10m$ per n); ovviamente:

$$0 \leq r_1 < n \quad \text{e} \quad 10m = nq_1 + r_1.$$

Essendo $m < n$, si ha che $10\ m < 10\ n$, quindi $0 \leq q_1 < 10$.

Il numero $q_1 \in \mathbb{N}_0$ **è detto prima cifra decimale di** $\frac{m}{n}$**.**

Se $r_1 = 0$ allora:

$$\frac{m}{n} = 0, q_1.$$

Se $r_1 \neq 0$, dividiamo $10\ r_1$ per n. Da tale divisione otteniamo $q_2, r_2 \in \mathbb{N}_0$ tali che:

$$0 \leq r_2 < n \quad \text{e} \quad 10\ r_1 = nq_2 + r_2,$$

ed inoltre, essendo $r_1 < n$, si ha pure che $0 \leq q_2 < 10$.

Il numero $q_2 \in \mathbb{N}_0$ **è detto seconda cifra decimale di** $\frac{m}{n}$**.**

Se $r_2 = 0$ allora:

$$\frac{m}{n} = 0, q_1 q_2.$$

Iterando questo procedimento o si verifica che uno dei resti è zero oppure, essendo i resti sempre minori di n, al più dopo n passi si ritrova uno dei resti ottenuti in precedenza (ciò comporta che anche i quozienti da un certo punto in poi si devono ripetere).

Nel primo caso, supposto che r_h sia il primo resto nullo, si ha che:

$$\frac{m}{n} = 0, q_1 q_2, \ldots q_h,$$

quindi $\frac{m}{n}$ *è un numero decimale finito.*

Nel secondo caso si ottiene una rappresentazione decimale di $\frac{m}{n}$ con un numero infinito di cifre decimali diverse da zero, ma con un gruppo di cifre (**detto periodo**) che si ripete indefinitamente a partire da una certa cifra decimale.

Esempio. Consideriamo il numero razionale $\frac{4}{7}$, con $m = 4$ e $n = 7$. Dividendo $10m$ per n ottengo la seguente sequenza di quozienti parziali e di resti parziali:

$q_1 = 5, q_2 = 7, q_3 = 1, q_4 = 4, q_5 = 2, q_6 = 8, q_7 = 5, ...$

$r_1 = 5, r_2 = 1, r_3 = 3, r_4 = 2, r_5 = 6, r_6 = 4, r_7 = 5, ...,$
quindi:

$$q_1 = q_7 \quad \text{e} \quad r_1 = r_7.$$

Il numero razionale $\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$ ed è un numero razionale periodico semplice.

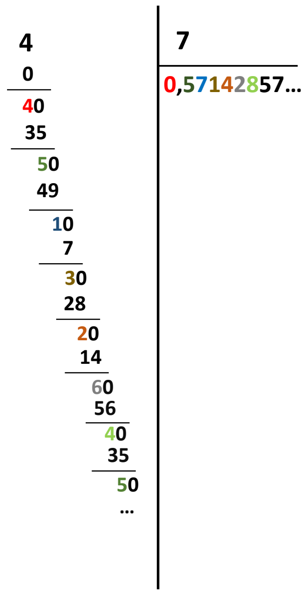

Figura 1: Esempio

Nell'Osservazione abbiamo considerato un numero razionale $\frac{m}{n}$, nel caso in cui $0 < m < n$, ci rimangono da analizzare il caso in cui $m > n$ e il caso in cui $m < 0$.

Vogliamo studiare tali casi con degli esempi; a tale scopo consideriamo i seguenti numeri razionali:

$$\frac{125}{9}, \quad -\frac{53}{7}.$$

Consideriamo il numero razionale $\frac{125}{9}$, il cui numeratore è maggiore del denominatore; siccome $125 = 13 \cdot 9 + 8$ si ha che:

$$\frac{125}{9} = \frac{13 \cdot 9 + 8}{9} = \frac{13 \cdot 9}{9} + \frac{8}{9} = 13 + \frac{8}{9}.$$

Seguendo il procedimento indicato sopra si ottiene che $\frac{8}{9} = 0,\overline{8}$, quindi

$$\frac{125}{9} = 13 + \frac{8}{9} = 13 + 0,\overline{8} = 13,\overline{8}.$$

Passiamo, ora, al numero razionale negativo $-\frac{53}{7}$; siccome $53 = 7 \cdot 7 + 4$ si ha che:

$$-\frac{53}{7} = -\frac{7 \cdot 7 + 4}{7} = -\left(7 + \frac{4}{7}\right).$$

Conseguentemente, ricordando che $\frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$, si ha che:

$$-\frac{53}{7} = -\left(7 + \frac{4}{7}\right) = -\left(7 + 0,\overline{571428}\right) = -7,\overline{571428}.$$

Concludiamo questo paragrafo osservando che, col procedimento sopra indicato, i numeri decimali periodici che si ottengono non hanno mai come periodo la cifra 9; quindi, possiamo concludere che non tutti i numeri decimali periodici sono i corrispondenti di un numero razionale. Chiariremo bene questa questione alla fine del paragrafo seguente.

0.2.1 Le frazioni generatrici

Esiste una regola che permette di scrivere un numero decimale come una frazione.

Se il numero decimale è finito, la frazione si scrive mettendo al numeratore il numero senza la virgola e al denominatore una potenza di 10 avente come esponente il numero delle cifre dopo la virgola.

Esempio.

$$1,25 = \frac{125}{10^2} = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}.$$

Per capire meglio come si costruisce la frazione corrispondente ad un numero decimale periodico consideriamo, ad esempio, il seguente numero:

$$1,2353535\cdots = 1,2\overline{35}$$

Ricordiamo che:

- si dice **periodo** il gruppo di cifre che si ripetono infinite volte (nell'esempio, il periodo è 35);

- si dice **antiperiodo** il gruppo di cifre che sta tra la virgola e il periodo (nell'esempio, l'antiperiodo è 2).

Vediamo la regola che ci permette di costruire la frazione generatrice di un numero decimale periodico.

La frazione generatrice si scrive nel modo seguente:

- *al* **numeratore** *di tale frazione si mette il numero dato, senza la virgola e senza il segno del periodo, e da questo numero si sottrae tutto ciò che sta prima del periodo;*
- *al* **denominatore** *di tale frazione si mettono tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.*

Seguendo la regola appena descritta abbiamo che:

$$1,2353535\cdots = 1,2\overline{35} = \frac{1235-12}{990} = \frac{1223}{990}.$$

Esempio. - Trasformare i seguenti numeri decimali in frazioni:

$$0,025; \qquad 4,3\overline{21}; \qquad 0,\overline{216}; \qquad 0,2\overline{16}; \qquad 0{,}21\overline{6}.$$

Svolgimento: Seguendo le indicazioni date sopra si ottiene che:

$$\begin{aligned}
0,025 &= \frac{25}{1000};\\
4,3\overline{21} &= \frac{4321-43}{990} = \frac{4278}{990};\\
0,\overline{216} &= \frac{216}{999};\\
0,2\overline{16} &= \frac{216-2}{990} = \frac{214}{990};\\
0,21\overline{6} &= \frac{216-21}{900} = \frac{195}{900}.
\end{aligned}$$

Esempio. - Un bicchiere contiene $\frac{1}{4}$ di litro di acqua. Se si vuole riempire la bottiglia da 1,5 litri, quanti bicchieri di acqua bisogna versare nella bottiglia? [1]
Svolgimento: La traccia richiede di trovare il numero n che, moltiplicato per $\frac{1}{4}$ L, ci restituisca 1,5 L che, scritto in frazione, è equivalente a $\frac{15}{10}$. Dunque, la richiesta si traduce matematicamente in questo modo:

$$n \cdot \frac{1}{4}L = \frac{15}{10}L \Rightarrow n = \frac{15}{10} \cdot 4 = 6.$$

Esempio. - Una mamma deve somministrare al figlio convalescente 150 mg di vitamina C ogni giorno. Avendo a disposizione compresse da 0,6 g, quante compresse al giorno deve dare al figlio?[2]

- un quarto di compressa;
- una compressa;
- due compresse e mezzo.

Svolgimento: Questo esercizio è analogo all'Esercizio 10. In particolare, la richiesta dell'esercizio si traduce in :

$$n \cdot 0,6g = 0,15g$$

Ossia, scritta con le frazioni:

$$n \cdot \frac{6}{10}g = \frac{15}{100}g \Rightarrow n = \frac{15}{100} \cdot \frac{10}{6} = \frac{1}{4}$$

[1]Invalsi 2015
[2]Invalsi 2008

Concludiamo questo paragrafo mostrando che:

Un numero decimale di periodo 9 si può identificare con un opportuno numero decimale di periodo 0 (cioè un numero decimale finito).

A tale scopo, consideriamo il numero decimale $1,32\overline{9}$ ed osserviamo che:

$$1,32\overline{9} = \frac{1329 - 132}{900} = \frac{1197}{900} = 1,33.$$

Alla luce dell'esempio considerato *è naturale identificare ogni numero decimale di periodo 9 con quello che da esso si ottiene eliminando il periodo 9 e aumentando di un'unità l'ultima cifra che precede il periodo.*

Quindi, d'ora in poi, quando incontreremo un numero del tipo $0,41\overline{9}$, invece di scrivere:

$$0,41\overline{9} = \frac{419 - 41}{900} = \frac{378}{900} = 0,42,$$

scriveremo direttamente $0,42$.

Esempio. - Calcolare il valore della seguente espressione, dopo aver trasformato i numeri decimali in frazioni.

$$3,5 - \frac{1}{2} \cdot 1,\overline{9}.$$

Svolgimento: Seguendo la regola sopra definita:

$$3,5 - \frac{1}{2} \cdot 1,\overline{9} = \frac{35}{10} - \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{35}{10} - 1 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

III) Le pagine 11 e 12 sostituiscono i paragrafi 3.4 e 3.5 del volume EASY MATHS 1.

0.3 3.4 - Divisione tra un polinomio e un monomio

Definizione 0.3.1 *Dati due monomi $M_1(x)$ e $M_2(x)$, con $M_2(x)$ monomio non nullo, si dice che $M_1(x)$ è divisibile per $M_2(x)$ quando esiste un monomio $Q(x)$ tale che:*

$$M_1(x) = M_2(x) \cdot Q(x).$$

Osserviamo che, se $M_1(x)$ è il monomio nullo allora $M_1(x)$ è divisibile per un qualunque monomio; infatti, basta prendere $Q(x)$ uguale al monomio nullo.

Invece, se $M_1(x)$ è non nullo, allora $M_1(x)$ è divisibile per $M_2(x)$ se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

1. in $M_1(x)$ compaiono tutte le lettere presenti in $M_2(x)$,

2. ogni lettera che compare in $M_2(x)$ ha esponente minore o uguale all'esponente della corrispondente lettera presente in $M_1(x)$.

Definizione 0.3.2 *Dati il polinomio $P(x)$ e il monomio $C(x)$, entrambi non nulli, si dice che $P(x)$ è divisibile per $C(x)$ quando ogni termine di $P(x)$ è divisibile per $C(x)$.*

Esempio. - Calcolare il quoziente tra il polinomio $P(x) = 4x^3 + 16x^2 + 8x$ e il monomio $C(x) = 2x$:

$$P(x) : C(x) = (4x^3 + 16x^2 + 8x) : 2x. \tag{1}$$

Applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione, si ottiene:

$$\begin{aligned}(4x^3 + 16x^2 + 8x) : 2x &= 4x^3 : 2x + 16x^2 : 2x + 8x : 2x = \\ &= \frac{4}{2}x^{3-1} + \frac{16}{2}x^{2-1} + \frac{8}{2}x^{1-1} = \\ &= 2x^2 + 8x + 4.\end{aligned}$$

0.4 3.5 - Divisione tra due polinomi

Definizione 0.4.1 *Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi non nulli. si dice che $A(x)$ è divisibile per $B(x)$ quando esiste un polinomio $Q(x)$ tale che:*

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

I polinomi $A(x)$, $B(x)$ e $Q(x)$ si dicono, risp., dividendo, divisore e quoziente della divisione.

Se il polinomio $A(x)$ non è divisibile per $B(x)$ il loro rapporto si indica semplicemente con la frazione algebrica:

$$\frac{A(x)}{B(x)}.$$

Concludiamo il paragrafo con la seguente:

Proposizione 0.4.2 - *Se i polinomi $A(x)$ e $B(x)$ hanno, risp., grado n ed m, con $n \geq m$, allora esistono e sono unici i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, con $Q(x)$ di grado n-m e $R(x)$ di grado minore di m, tali che:*

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

IV) Le pagine 13 e 14 sostituiscono l'esempio che inizia alla fine di pagina 69 del volume EASY MATHS 1.

Mostriamo che è possibile utilizzare la regola di Ruffini anche quando il binomio (divisore) $D(x)$ è uguale a "$ax+b$" invece che a "$x+c$".

A tale scopo, iniziamo con il seguente:

Esempio. Siano $P(x) = 2x^3 - x - 1$ e $D(x) = 2x + 3$. Calcoliamo il quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$ della divisione tra $P(x)$ e $D(x)$.

Osservato che:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{2x^3 - x - 1}{2x+3} = \frac{2(x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})}{2(x + \frac{3}{2})} = \frac{x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x + \frac{3}{2}},$$

utilizziamo la regola di Ruffini per calcolare il quoziente e il resto della divisione tra $x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ e $x + \frac{3}{2}$:

	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{3}{2}$		$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{21}{8}$
	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{25}{8}$

Figura 2: Regola di Ruffini per $(x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) : (x + \frac{3}{2})$

quindi, si ottiene che:

$$x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right) - \frac{25}{8}. \tag{2}$$

Ora, moltiplicando primo e secondo membro della (2) per 2, si ottiene:

$$2\left(x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right) - \frac{25}{8}\right],$$

cioè:

$$2x^3 - x - 1 = (2x+3)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right) - 2\,\frac{25}{8} = (2x+3)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right) - \frac{25}{4},$$

allora, il quoziente e il resto della divisione tra $2x^3 - x - 1$ e $2x + 3$, sono:

$$Q(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \quad \text{e} \quad R(x) = -\frac{25}{4}.$$

Tenendo presente lo svolgimento dell'esempio appena considerato, ricaviamo la regola generale.

Siano $P(x)$ un polinomio non nullo e $D(x) = ax + b$, con $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ e $b \in \mathbb{R}$.

Vogliamo individuare il quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$ della divisione tra $P(x)$ e $D(x)$, usufruendo della regola di Ruffini.

Essendo $a \neq 0$, ha senso considerare:

$$P^*(x) = \frac{P(x)}{a} \quad \text{e} \quad D^*(x) = \frac{D(x)}{a} = x + \frac{b}{a}. \tag{3}$$

Si noti che $D^*(x)$ è del tipo "$x + c$" quindi, possiamo dividere $P^*(x)$ per $D^*(x)$ utilizzando la regola di Ruffini.

In questo modo, denotati con $Q^*(x)$ e $R^*(x)$, risp., il quoziente e il resto di tale divisione, abbiamo che:

$$P^*(x) = D^*(x) \cdot Q^*(x) + R^*(x);$$

quindi, dalla (3) si ottiene:

$$\frac{P(x)}{a} = \frac{D(x)}{a} \cdot Q^*(x) + R^*(x); \tag{4}$$

moltiplicando primo e secondo membro della (4) per a, si ha che:

$$P(x) = D(x) \cdot Q^*(x) + aR^*(x).$$

Conseguentemente, il quoziente $Q(x)$ e il resto $R(x)$ della divisione tra $P(x)$ e $D(x)$ sono dati da:

$$Q(x) = Q^*(x) \quad \text{e} \quad R(x) = aR^*(x).$$